CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
”SPIRU HARET”
EDIȚIA A XX-A, 11 MAI 2019

BAREM DE CORECTARE CLASA A –X-A

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

a) (2p) Să se arate că f nu este funcție injectivă.

b) (3p) Să se determine imaginea funcției și să se decidă dacă f este funcție surjectivă.

c) (2p) Determinați $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $4f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=1$.

Barem:

a) $f(1)=f(-1)$, deci f nu este injecție………………………………………………………… ..2p

b) Ecuația $f(x)=y, y\in\mathbb{R}$ are soluție dacă și numai dacă $y\in[-1,1)$, adică $\operatorname{Im} f=[-1,1)$ ………..2p

$\operatorname{Im} f\neq\mathbb{R}$, deci funcția nu este surjecție……………………………………………………………....1p

c) Obține mulțimea soluțiilor $S=\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$ ……………………..…………………………..….2p

2. Se consideră funcția $f:D\to\mathbb{R}, D\subset\mathbb{R},\ f(x)=\log_3\left(\sqrt{\dfrac{x^2-3x}{x+2}}\right)$.

a) (3p) Să se determine domeniul maxim de definiție D.

b) (4p) Să se rezolve ecuația $f(x)=1$.

Barem:

a) $\dfrac{x^2-3x}{x+2}>0\Rightarrow D=(-2,0)\cup(3,+\infty)$ ………….……..…………………………..……….…..……3p

b) $f(x)=1\Leftrightarrow\log_3\left(\sqrt{\dfrac{x^2-3x}{x+2}}\right)=1\Leftrightarrow\dfrac{x^2-3x}{x+2}=9$ …………………………………….………....…2p

Finalizare: mulțimea soluțiilor este $S=\{6-3\sqrt{6},6+3\sqrt{6}\}$ ………………………………….…..2p

3. Se consideră numerele reale $x=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$ și $y=\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$.

a) (2p) Arătați că $xy=-1$.

b) (2p) Arătați că $(x+y)^3+3(x+y)=14$.

c) (3p) Arătați că x^n+y^n este număr natural par pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Barem:

a) Verificare prin calcul 2p

b) Verificare prin calcul...2p

c) Obține $x+y=2, x^2+y^2=6$, care sunt, evident, numere pare..1p

x, y sunt soluțiile ecuației $t^2 - 2t - 1 = 0$ și se obține $S_{n+2} = 2S_{n+1} + S_n, \forall n \geq 1$, unde am notat $S_n = x^n + y^n$ 1p

Demonstrează folosind metoda inducției matematice că S_n este număr par.......................................1p

4. a) (3p) Să se determine numărul complex z care verifică egalitatea $z + |z| = 4(i+2)$.

b) (4p) Arătați că, dacă $z_1, z_2 \in \mathbb{C}, |z_1 + z_2| = \sqrt{3}, |z_1| = |z_2| = 1$, atunci $|z_1 - z_2| = 1$.

Barem:

a) Consideră $z = a + ib$ și obține $a = 3, b = 4 \Rightarrow z = 3 + 4i$ ………………...……………………..…3p

b) Folosind $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$ ……………….………………………………….……….………………..1p

se obține $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$ ……………………………………………………..…2p

Finalizare $|z_1 - z_2| = 1$ …………………………………………………………………………...1p

Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.