**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ**
**”SPIRU HARET”**
**EDIȚIA A XX-A, 11 MAI 2019**

**BAREM DE CORECTARE CLASA A – XII-A**

**1.** Pe mulţimea $G=(2,+\infty)$ definim legea de compoziţie $x\circ y=xy-2x-2y+6.$

a) (1p) Să se arate că pentru orice $x,y\in G$, rezultă $x\circ y\in G$.

b) (4p) Să se arate că $(G,\circ)$ este grup abelian.

c) (2p) Determinați toate izomorfismele $f:\mathbb{R}\to G$, de forma $f(x)=e^{\alpha x}+\beta,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, între grupurile $(\mathbb{R},+)$ și $(G,\circ)$.

**Barem:**

a) Demonstrarea cerinței……………………………………………………………….……………1p
b) Demonstrează că $(G,\circ)$ este grup abelian ………………………………………….………….4p
b) Determină $f(x)=e^{\alpha x}+2,\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ……………………………………………….…….…2p

**2.** Se consideră polinomul $f=X^3+aX+b,$ cu $a,b\in\mathbb{R}$ și $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$ rădăcinile sale.
a) (3p) Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care *f* este divizibil cu $X+1$ și $f(1)=4$.
b) (2p) Să se calculeze $x_1^2+x_2^2+x_3^2$ și să se demostreze că *f* are o singură rădăcină reală dacă $a\in(0,+\infty)$.
c) (2p) Pentru $a=1,b=2$, să se rezolve inecuația $f(\log_2 x)\le 0$.
**Barem:**
a) $f(-1)=0,\ f(1)=4\Rightarrow a=1,b=2$ ………..………………………………………….…………..3p
b) $x_1^2+x_2^2+x_3^2=-2a$ ………………………………………………….……………..………..…1p
Justificare pentru faptul că *f* are o singură rădăcină reală dacă $a\in(0,+\infty)$.....................................1p
c) $f=X^3+X+2=(X+1)(X^2-X+2)$ ……………………………………………………………..…1p
$f(\log_2 x)\le 0\Leftrightarrow \log_2 x+1\le 0$ și se obține mulțimea soluțiilor $S=\left(0,\frac{1}{2}\right]$.....................................1p

**3.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}ax^3+(a+1)x+1, x\le 1\\ 2ax^2+(a+2)x+3,\ x>1\end{cases}.$
a) (3p) Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care funcția *f* admite primitive pe $\mathbb{R}$.
b) (4p) Pentru $a=-3$ determinați o primitivă $F$ cu proprietatea că $F(1)=0$.

**Barem:**

a) Demonstrează că *f* admite primitive dacă și numai dacă $a = -3$ ....................................................3p

b) Determină primitiva cerută.........................................................................................................4p

**4.** Calculați: a) (4p) $\int \frac{x+x^3}{1+x^4}dx$; b) (3p) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x+\cos x}{e^x+\cos x+\sin x}dx.$

**Barem:**

a) $\int \frac{x+x^3}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+\left(x^2\right)^2}dx + \int \frac{x^3}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}arctg\left(x^2\right) + \ln\left(1+x^4\right) + C$ ……………………...……4p

b)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x+\cos x}{e^x+\cos x+\sin x}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x+\cos x+\sin x+\left(e^x+\cos x+\sin x\right)'}{e^x+\cos x+\sin x}dx = \frac{1}{2}\left(x+\ln\left(e^x+\cos x+\sin x\right)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}\right)$$ ……………………………………………………………………………...….3p

***Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.***